数理解析研究所講究録 1373 巻 2004 年 133-141

セルオートマトンとその応用 - ルール番号 146 -

大鑄　史男 (Ohi Fumio)
名古屋工業大学,　〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町
Nagoya Institute of Technology,　Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555, Japan
E-mail:ohi.fumio@nitech.ac.jp

序　$S=\{0,1\}$ と S^3 から S への写像 g との組 (S,g) を Elementary Cellular Automaton(ECA) と呼ぶ．ECA (S,g) には，$2^8=256$ 通りあり，それぞれの ECA (S,g) は次のようにして定まるルール番号 RN(S,g) を持つ．

$$\mathrm{RN}(S,g)=\sum_{a,b,c} g(a,b,c)2^{a2^2+b2+c}.$$

ECA (S,g) に対して，次のようにして $\boldsymbol{g}: S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ を定義できる．

$$\forall \boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}},\ \forall i \in \mathbf{Z},\ (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))_i = g(x_{i-1},x_i,x_{i+1})$$

$S^{\mathbf{Z}}$ の要素を configuration と呼ぶ．ここで $\mathbf{Z}$ は，整数全体の集合である．特に $(\cdots,0,0,1,0,0,\cdots)$ を single seed configuration と呼ぶ．ECA (S,g) の g を local rule，g から定められる $\boldsymbol{g}: S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ を global rule と呼び，g の bold face $\boldsymbol{g}$ で書き表す．σ_L と σ_R をそれぞれ $S^{\mathbf{Z}}$ 上の left shift および right shift transformation とする．S 上には離散位相が定義されていて，その直積位相が $S^{\mathbf{Z}}$ 上に定義されているとする．$\boldsymbol{g}$ は $S^{\mathbf{Z}}$ 上の dynamics を定め，$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ を出発点とする軌道は，次のように定められる．

$$\boldsymbol{g}^0(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{g}^{t+1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})),\ t\geq 0.$$

$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ を initial configuration としたとき，dynamics $\boldsymbol{g}$ が定める時空間パターンとは，$\{(t,\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})),t\geq 0\}$ のことである．一般的に我々が問題にするのは，ECA (S,g) が定める $S^{\mathbf{Z}}$ 上の dynamics $\boldsymbol{g}$ の解析及び時空間パターン $\{(t,\boldsymbol{g}^t(\boldsymbol{x})),t\geq 0\}$，$\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ の特性である．本稿で問題にするのは Sierpinski class に属するルール番号 146 を持つ ECA が定める $\boldsymbol{g}$ が描く軌道についての議論に資することを目的として，後に述べる 1-step predecessor と 2-step predecessor の型を定めることである．

ECA (S,g) は，$g(0,0,0)=0$ であるとき 0-quiescent であると呼ばれる．

$$\mathcal{F}=\{\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}} \mid \exists i \in \mathbf{Z},\ \exists j \in \mathbf{Z},\ i \leq j,\ \boldsymbol{x}=(\cdots,0,0,x_i,\cdots,x_j,0,0,\cdots)\}$$

と書き，$\mathcal{F}$ の要素を 0-finite configuration と呼ぶ．特に $(\cdots,0,0,0,\cdots)\in\mathcal{F}$ であると約束する．g が 0-quiescent であれば，$\boldsymbol{g}(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{F}$ である．よって $\boldsymbol{g}$ は，$\mathcal{F}$ 上での dynamics を定める．

以降では，ルール番号を明記する必要がある時，ルール番号 n を持つセルオートマトンの local rule とそれから決まる global rule をそれぞれ g_n 及び $\boldsymbol{g}_n$ と書く．

混乱を生じることなく，$\boldsymbol{g}$ を以下に定義される S^{n+2} から S^n への写像とみなすことがある．

$$\forall(y_1,\cdots,y_{n+2})\in S^{n+2},\quad \boldsymbol{g}(y_1,\cdots,y_{n+2})\equiv(g(y_1,y_2,y_3),g(y_2,y_3,y_4),\cdots,g(y_n,y_{n+1},y_{n+2}))\in S^n.$$

$\boldsymbol{g}(y_1,\cdots,y_{n+2})=(x_1,\cdots,x_n)$ であるとき，$(y_1,\cdots,y_{n+2})$ を $(x_1,\cdots,x_n)$ の 1-step predecessor であると呼ぶ．又，configurations $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in S^{\mathbf{Z}}$ に対して $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ である時，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の 1-step precedessor と呼ぶ．同様にして k-step predecessor $(k=1,2,3,\cdots)$ が定義される．

Notations　(1)　1 の block とは，1 が 2 個以上並んだもので，例えば $(1,1)$ や $(1,1,1)$ などを指し，長さ n の 1 の block とは，n 個の 1 が並んだものであり，$\mathbf{1}_n=(\underbrace{1,\cdots,1}_{n})$ と書く．同様に長さ n の 0 の block とは，$\mathbf{0}_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n})$ である．特に断ることなく $\mathbf{0}$ を $(\cdots,\overset{n}{0},0)$, $(0,0,\cdots)$, $(\cdots,0,0,0,\cdots)$ 等を表すものとして使うが，混乱は生じない．$\mathbf{1}$ に関しても同様である．

(2) $\boldsymbol{a}^i = (a_1^i, \cdots, a_{m_i}^i) \in S^{m_i}$, $i = \cdots, -n, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n$ に対して

$$(\cdots, \boldsymbol{a}^{-n}, \cdots, \boldsymbol{a}^0, \cdots, \boldsymbol{a}^n, \cdots) = (\cdots, a_1^{-n}, \cdots, a_{m_{-n}}^{-n}, \cdots, a_1^0, \cdots, a_{m_0}^0, \cdots, a_1^n, \cdots, a_{m_n}^n, \cdots),$$
$$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}^1) = (\cdots, 0, 0, 0, a_1^1, \cdots, a_{m_1}^1), \quad (\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{0}) = (a_1^1, \cdots, a_{m_1}^1, 0, 0, 0, \cdots),$$
$$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{0}) = (\cdots, 0, 0, 0, a_1^1, \cdots, a_m^1, 0, 0, 0, \cdots)$$

等と約束する．**0** の代わりに **1** を入れ替えた場合も同様である．

(3) $\boldsymbol{x} = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，以下のような記法を用いる．

$$\boldsymbol{x}_{i,j} = (x_i, \cdots, x_j),\ i \le j, \quad \boldsymbol{x}_{-\infty,i} = (\cdots, x_{i-1}, x_i), \quad \boldsymbol{x}_{i,\infty} = (x_i, x_{i+1}, \cdots).$$

また $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in S^n$ に対して $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_{-\infty,i}, \overset{i}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}_{i+1,\infty}) \in S^{\mathbf{Z}}$ は，$x_{i-n+1} = a_1, \cdots, x_i = a_n$ であることを意味する．つまり i は，$\boldsymbol{a}$ の最後の要素が $\boldsymbol{x}$ 中において位置する座標番号を意味する．

(4) $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in S^n$ と $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して $x_i = a_1, \cdots, x_{i+n-1} = a_n$ $(\exists i \in \mathbf{Z})$ であるとき，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{x}$ と書く．従って，例えば $\mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}$ は，$x_i = \cdots = x_{i+n-1} = 1$ $(\exists i \in \mathbf{Z})$ を意味する．

1. Sierpinski Gasket を生成するセルオートマトン $g(0,0,1) = g(1,0,0) = 1$, $g(1,0,1) = g(0,1,0) = g(0,0,0) = 0$ を満たす local rule を持つ ECA を集めたものを

$$C_s = \{\boldsymbol{g}_{18}, \boldsymbol{g}_{26}, \boldsymbol{g}_{82}, \boldsymbol{g}_{90}, \boldsymbol{g}_{146}, \boldsymbol{g}_{154}, \boldsymbol{g}_{210}, \boldsymbol{g}_{218}\}$$

と置く．$\boldsymbol{g}_{26}$ と $\boldsymbol{g}_{82}$，$\boldsymbol{g}_{154}$ と $\boldsymbol{g}_{210}$ はそれぞれ互いに対称の関係にある．それぞれの rule に従い sigle seed configuration を時間発展させると Sierpinski Gasket が得られる．

$$\mathcal{W}_{cvcn} \equiv \{\boldsymbol{x} | x_{2m} = 0,\ m \in \mathbf{Z}\}, \quad \mathcal{W}_{\mathbf{odd}} \equiv \{\boldsymbol{x} | \mathbf{x_{2m+1} = 0,\ m \in Z}\}$$

とする．明らかに $(\mathcal{W}_{even} \backslash \{\mathbf{0}\}) \cap (\mathcal{W}_{odd} \backslash \{\mathbf{0}\}) = \phi$ である．また，$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{even} \cup \mathcal{W}_{odd}$ と書く．$\mathcal{W}$ は，1 が孤立し，1 と 1 との間の 0 の個数が奇数個であるような configuration 全体の集合である．

Proposition 1.1[9] $\boldsymbol{g} \in C_s$ とし，$\boldsymbol{h}_L = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}$ とする．次のことが成立する．

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{even}, \quad (\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m, \\ x_i \oplus x_{i+2}, & i = 2m+1, \end{cases}$$
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad (\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}))_i = \begin{cases} 0, & i = 2m+1, \\ x_i \oplus x_{i+2}, & i = 2m, \end{cases}$$

である．このことから

$$\boldsymbol{h}_L(\mathcal{W}_{even}) \subseteq \mathcal{W}_{even}, \quad \boldsymbol{h}_L(\mathcal{W}_{odd}) \subseteq \mathcal{W}_{odd}.$$

さらに

$$\forall t \ge 0,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{even}, \quad \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{y}),$$
$$\forall t \ge 0,\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{W}_{odd}, \quad \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \oplus \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{y}).$$

$\boldsymbol{g} \in C_s$ とし，$\boldsymbol{h}_R = \sigma_R \circ \boldsymbol{g}$ とした時も同様のことが成立する． □

C_s に属するルールの $\mathcal{W}$ 上での dynamics は同一であり，それはルール 90 と同様であることが判る．

Proposition 1.2[9] $\boldsymbol{g} \in C_s$ に対して，$\boldsymbol{h}_L = \sigma_L \circ \boldsymbol{g}$ とする．$\delta = (\mathbf{0}, \overset{0}{1}, \mathbf{0}) \in \mathcal{W}_{odd}$ に対して

$$A_0 = (\delta), \quad A_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{h}_L(\delta) \\ \boldsymbol{h}_L^2(\delta) \\ \cdots \\ \boldsymbol{h}_L^{2^n-1}(\delta) \end{pmatrix}, \ n \ge 1$$

と置けば，次のことが成立する．

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ \sigma_L^{2^n} A_{n-1} \oplus A_{n-1} \end{pmatrix},\ n \geq 1,$$

$$\boldsymbol{h}_L^{2^n-1}(\delta) = (\cdots,0,0,0,\overset{-(2^{n+1}-2)}{1},0,1,0,\cdots,0,\overset{0}{1},0,0,0,\cdots),$$

$$\forall t \geq 0, \quad \left(\boldsymbol{h}_L^t(\delta)\right)_{0,\rightarrow} = (1,\mathbf{0}).$$

C_s に属するルールが single-seed configuration に対して入れ子構造を持つ time-space pattern を生成することを意味している．

2. ルール 18 と 146 ルール 18 と 146 の local rule は次の表で与えられる．

(a,b,c)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$g_{18}(a,b,c)$	0	0	0	1	0	0	1	0
$g_{146}(a,b,c)$	1	0	0	1	0	0	1	0

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}} \mid \forall n \geq 3,\ \mathbf{1}_n \notin \boldsymbol{x}\}$$

とする．$\mathcal{U}$ は，長さ 3 以上の 1 のブロックを含まない configuration 全体の集合である．

ルール 18 では $(1,1,1)$ の predecessor が存在しないため，次の Proposition が明らかに成立する．

Proposition 2.1 (ルール 18)[9]

$$\boldsymbol{h}_{18L}(S^{\mathbf{Z}}) \subset \mathcal{U}, \quad \boldsymbol{h}_{18L}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}.$$

この Proposition から，任意の $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，$\boldsymbol{h}_{18L}(\boldsymbol{x})$ には，長さが 3 以上の 1 のブロックは含まれず，1 が存在しても，それは孤立しているか，または長さが 2 のブロックでしかないことがわかる．

Lemma 2.2 (ルール 146)[9] (1) ルール番号 146 において $(0,\underbrace{1,\cdots,1}_{n\geq 3},0)$ の predecessor は，$(0,\underbrace{1,\cdots,1}_{n+2},0)$ に限る．

(2) $\boldsymbol{x} = (\cdots,\overset{i}{0},\cdots)$ に対して，

$$\forall t \geq t, \quad \left(\boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x})\right)_{i-1,i+2} \neq (0,1,1,1)$$

である．

この Lemma 2.2 から次の Proposition 2.3 は，明らかである．

Proposition 2.3 (ルール 146)[9] (1) $\boldsymbol{h}_{146L}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},\ \exists t \geq 0,\quad \boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}$.

(3) $\boldsymbol{x} \in S^{\mathbf{Z}}$ に対して，

$$\sup\{n | \mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}\} < \infty \Rightarrow \exists t \geq 0,\ \boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U},$$

$$\sup\{n | \mathbf{1}_n \in \boldsymbol{x}\} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x}) \notin \mathcal{U}, \\ \lim_{t\to\infty} d(\boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x}),\mathcal{U}) = 0. \end{cases} \quad \square$$

$\mathcal{U}$ に属する configuration 中の 1 は，長さ 2 のブロックであるか，または孤立している．従って，local rule としては，$(1,1,1)$ に対応する値を用いる必要はない．従って，**$\mathcal{U}$ 上では，ルール 146 とルール 18 とは全く同じ力学を描くことになる．**

Proposition 2.4 (ルール 18 と 146)[9]

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{U},\ \forall t \geq 0, \quad \boldsymbol{h}_{18L}^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}_{146L}^t(\boldsymbol{x}). \quad \square$$

$\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ であり，$\boldsymbol{h}_{18L}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}, \boldsymbol{h}_{146L}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$ であることから，問題は，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{W}$ から出発した軌道がいずれ $\mathcal{W}$ に入るのかどうかである．

3. $\mathcal{U}$ 上でのルール 146 本節では，ルール 146 のみを考える．そのため，global rule は，ルール番号を付けずに書き表す．また，**以降では，全て $\mathcal{U}$ の中で考えることにし，** predecessor を調べる際にも $\mathbf{1}_n$, $n \geq 3$ を含まないようなもののみを考える．

Proposition 3.1 (1) $\boldsymbol{x} = (\cdots, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{U}$ に対して， $\forall t \geq 0,\ \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \notin \mathcal{W}$.

(2) $\boldsymbol{x} = (\cdots, 0, 0, \underbrace{1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots, 0, 1, 1, 0, 1, 1}_{n(\geq 1)\ \text{組の}\ (1,1)}, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{U}$ に対して

$$\boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}) = (\cdots, 0, 0, 1, \underbrace{0, 0, 0, \cdots, 0, 0, 0}_{3(n-1)+2\ \text{個の}\ 0}, 1, 0, 0, \cdots)$$

であり，従って n が偶数であれば，$3(n-1)+2$ は奇数であり従って， $\forall t \geq 1,\ \boldsymbol{h}_L^t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W}$.

Proof (2) は，g_{146} に従って $\boldsymbol{x}$ を時間発展させれば，明らかである．(1) の証明について触れておく．Proposition 1.2 の $A_0, A_1, \cdots$ を用いて，次の関係が n に関する帰納法で証明できる．この関係から，(1) が成立することが解る．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{h}_L(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{h}_L^2(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{h}_L^3(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{h}_L^4(\boldsymbol{x}) \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_L A_0 \oplus A_0 \\ \sigma_L^3 A_1 \oplus A_1 \\ \sigma_L^7 A_2 \oplus A_2 \\ \cdots \\ \sigma_L^{2^{n+1}-1} A_n \oplus A_n \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

この Proposition 3.1 から，$\mathcal{U} \backslash \mathcal{W}$ から出発した時，常に軌道が $\mathcal{W}$ に入るとは限らず，入るものと入らないものがあることがわかる．$\mathcal{W}$ に入るものがどのようなものであるかを調べる．そのために，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{W}$ の predecessor の型を調べていくことにする．

3-1 1-step predecessor

Proposition 3.2 $(1, \underbrace{0, 0, \cdots, 0, 0}_{n \geq 1\ \text{個の}\ 0}, 1)$ の predecessor で $\mathbf{1}_m$, $m \geq 3$ を含まないものは，次のいずれかの型を持つ．

$$(1, \underbrace{0, 0, \cdots, 0, 0}_{n+2\ \text{個の}\ 0}, 1),$$
$$(0, \underbrace{0, \mathbf{1}_{i_1}, 0, \mathbf{1}_{i_2}, 0, \cdots, 0, \mathbf{1}_{i_m}, 0}_{n+2\ \text{個の要素}}, 0),$$
$$m \geq 1,\ i_1 + i_2 + \cdots + i_m + m + 1 = n + 2,$$
$$i_j = 1 \text{ or } 2,\ j = 1, \cdots, m.$$

このことから

$$n: \text{偶数} \Longrightarrow \sharp\{\, j \mid i_j = 2,\ 1 \leq j \leq m \,\}: \text{奇数},$$
$$n: \text{奇数} \Longrightarrow 0 \leq \sharp\{\, j \mid i_j = 2,\ 1 \leq j \leq m \,\}: \text{偶数}.$$

Proof: 後半は，前半から明らかである．$(1, \mathbf{0}_n, 1)$ の predecessor を $(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3})$ と書き，その型がどのようになるかを調べる．

$$g(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}) = (1, \mathbf{0}_n, 1).$$

ルール 146 の local transition function が次の性質を持つことに注意する．

$$\left.\begin{array}{l} g(1,0,0)=g(0,0,1)=1, \\ g(a,b,c)=0, \quad (a,b,c)\neq(1,0,0) \text{ and } (a,b,c)\neq(0,0,1) \end{array}\right\}(*)$$

この性質より，次のことが解る．

$$(y_0,y_1,y_2)=(1,0,0) \text{ or } (0,0,1) \quad \text{and} \quad (y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,0,0) \text{ or } (0,0,1).$$

(i) $(y_0,y_1,y_2)=(1,0,0)$ である時，性質 $(*)$ に注意すれば

$$(y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{n+2\text{ 個の }0},1).$$

(ii) $(y_0,y_1,y_2)=(0,0,1)$, $(y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(0,0,1)$ であるとする．

$g(1,0,0)=1$ であることから $y_n=0$ である．帰納的に $y_{n-1}=\cdots=y_3=0$ となり $g(y_2,y_3,y_4)=g(1,0,0)=1$ であるが，一方 $g(y_2,y_3,y_4)=1$ であり，これらは矛盾である．よって

$$(y_0,y_1,y_2)=(0,0,1) \quad \text{and} \quad (y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,0,0).$$

(iii) (i) と (ii) とから

$$(y_0,y_1,y_2)=(1,0,0) \quad \text{and} \quad (y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(0,0,1),$$
$$(y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{n+2\text{ 個の }0},1)$$

または，

$$(y_0,y_1,y_2)=(0,0,1) \quad \text{and} \quad (y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,0,0).$$

(iv) $(y_0,y_1,y_2)=(0,0,1)$ and $(y_{n+1},y_{n+2},y_{n+3})=(1,0,0)$ の場合を調べる．

$g(1,0,0)=g(0,0,1)=1$ であることから $(y_3,y_4,\cdots,y_n)$ 中に大きさが 2 以上の 0 のブロックが存在してはならない，つまり

$$\forall k\geq 2,\ \mathbf{0}_k\notin(y_3,\cdots,y_n).$$

$\mathbf{1}_k$ $(k\geq 3)$ を含まない predecessor を定めようとしていることから，性質 $(*)$ に注意すれば，predecesssor は，$\mathbf{1}_1$ または $\mathbf{1}_2$ が一つの 0 を挟むようにしてできている．従って，次のようになり，証明は終了する．

$$(y_0,y_1,\cdots,y_{n+2},y_{n+3})=(0,\underbrace{0,\mathbf{1}_{i_1},0,\mathbf{1}_{i_2},0,\cdots,0,\mathbf{1}_{i_m},0}_{n+2\text{ 個の要素}},0),$$
$$m\geq 1,\ i_1+i_2+\cdots+i_m+m+1=n+2,\quad i_j=1 \text{ or } 2,\quad j=1,\cdots,m. \quad \square$$

Example 3.3 Proposition 3.2 より，例えば (1) $(1,0,1)$ の predecessor は，$(0,0,1,0,0)$ or $(1,0,0,0,1)$ である．(2) $(1,0,0,1)$ の predecessor は，$(0,0,1,1,0,0)$ or $(1,0,0,0,0,1)$ である．(3) $(1,0,0,0,1)$ の predecessor は，$(0,0,1,0,1,0,0)$ or $(1,0,0,0,0,0,1)$ である． □

$g(1,0,1)=0$ に注意しながらこの Proposition 3.2 を用いれば，1 **が孤立している**ような configuration の predecessor の型が次のように定まる．

Proposition 3.4 以下では，$n_i\geq 1$, $i=1,\cdots,l$ であり，各 a_i, $i=1,\cdots,l$ は次のような形である．

$$a_i=(\underbrace{\mathbf{1}_{i_1},0,\mathbf{1}_{i_2},0,\cdots,0,\mathbf{1}_{i_{m-1}},0,\mathbf{1}_{i_m}}_{n_i\text{ 個の要素}}),$$
$$m\geq 1,\ i_1+\cdots+1_m+m-1=n_i,$$
$$i_j=1 \text{ or } 2,\ j=1,\cdots,l,\cdots.$$

(1) $(1,\mathbf{0}_{n_1},1,\mathbf{0}_{n_2},\cdots,\mathbf{0}_{n_{l-1}},1,\mathbf{0}_{n_l},1))$ の predecessor で $\mathbf{1}_m$ $(m\geq 3)$ を含まないものの型は；

(1-i) $k=2m$ の場合，次の二つの型がある．

$$(0,0,\boldsymbol{a}_1,\mathbf{0}_{n_2+2},\boldsymbol{a}_3,\mathbf{0}_{n_4+2},\cdots,\boldsymbol{a}_{2m-1},\mathbf{0}_{2m+2},1),$$
$$(1,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\mathbf{0}_{n_3+2},\boldsymbol{a}_4,\cdots,\mathbf{0}_{n_{2m-1}+2},\boldsymbol{a}_{2m},0,0).$$

(1-ii) $k=2m+1$ の場合，次の二つの型がある．

$$(0,0,\boldsymbol{a}_1,\mathbf{0}_{n_2+2},\cdots,\mathbf{0}_{n_{2m}+2},\boldsymbol{a}_{2m+1},0,0),$$
$$(1,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{2m}.\mathbf{0}_{n_{2m+1}+2},1).$$

(2) $(1,1)$ の predecessor で $\mathbf{1}_m$ $(m\geq 3)$ を含まないものは $(1,0,0,1)$ のみである，

Proof: (1) は Proposition 3.2 から明らかである．(2) は $g(a,b,c)=1$ が $(a,b,c)=(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ の場合にのみ成立することに注意すればよい． □

この Proposition 3.4 より次の Proposition 3.5 は容易である．

Proposition 3.5 以下では，$n_i\geq 1$, $i=\cdots,-l,\cdots,0,\cdots,l,\cdots$ であり，各 $\boldsymbol{a}_i$, $i=\cdots,-l,\cdots,0,\cdots,l,\cdots$ は次のような形である．

$$\boldsymbol{a}_i=\underbrace{(\mathbf{1}_{i_1},0,\mathbf{1}_{i_2},0,\cdots,0,\mathbf{1}_{i_{m-1}},0,\mathbf{1}_{i_m})}_{n_i\text{ 個の要素}},$$
$$m\geq 1,\ i_1+\cdots+\imath_m+m-1=n_i,$$
$$i_j=1\text{ or }2,\ j=\cdots,-l,\cdots,0,\cdots,l,\cdots.$$

さらに，$\boldsymbol{a}_L,\boldsymbol{a}_R$ は次のような形である，

$$\boldsymbol{a}_L=(\cdots,0,\mathbf{1}_{i_{-2}},0,\mathbf{1}_{i_{-1}},0,\mathbf{1}_{i_0}),\quad \boldsymbol{a}_R=(\mathbf{1}_{i_0},0,\mathbf{1}_{i_1},0,\mathbf{1}_{i_2},0,\cdots),\quad i_j=1\text{ or }2,\ -\infty<j<\infty.$$

(1) $(\mathbf{0},1,\mathbf{0}_{n_1},1,\mathbf{0}_{n_2},\cdots,\mathbf{0}_{n_l},1,\mathbf{0})$ の predecessor は，

l が偶数の時，次の二つのいずれかの型である；

$$(\mathbf{0},\boldsymbol{a}_1,\mathbf{0}_{n_2+2},\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_{l-1},\mathbf{0}_{n_l+2},\boldsymbol{a}_R),$$
$$(\boldsymbol{a}_L,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\mathbf{0}_{n_3+2},\cdots,\mathbf{0}_{n_{l-1}+2},\boldsymbol{a}_l,\mathbf{0}).$$

l が奇数の時，次の二つのいずれかの型である；

$$(\boldsymbol{a}_L,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\mathbf{0}_{n_3+2},\cdots,\boldsymbol{a}_{l-1},\mathbf{0}_{n_l+2},\boldsymbol{a}_R),$$
$$(\mathbf{0},\boldsymbol{a}_1,\mathbf{0}_{n_2+2},\boldsymbol{a}_3,\cdots,\mathbf{0}_{n_{l-1}+2},\boldsymbol{a}_l,\mathbf{0}).$$

(2) $(\cdots,\mathbf{0}_{n_{-l}},1,\mathbf{0}_{n_{-(l-1)}},1,\cdots,1,\mathbf{0}_{n_{-1}},1,\mathbf{0})$ の predecessor は，次の二つのいずれかの型である；

$$(\cdots,\mathbf{0}_{n_{-6}+2},\boldsymbol{a}_{-5},\mathbf{0}_{n_{-4}+2},\boldsymbol{a}_{-3},\mathbf{0}_{n_{-2}+2},\boldsymbol{a}_{-1},\mathbf{0}),$$
$$(\cdots,\boldsymbol{a}_{-6},\mathbf{0}_{n_{-5}+2},\boldsymbol{a}_{-4},\mathbf{0}_{n_{-3}+2},\boldsymbol{a}_{-2},\mathbf{0}_{n_{-1}+2},\boldsymbol{a}_R).$$

(3) $(\mathbf{0},1,\mathbf{0}_{n_1},1,\mathbf{0}_{n_2},1,\cdots,1,\mathbf{0}_{n_l},1,\cdots)$ の predecessor は，次の二つのいずれかの型である；

$$(\mathbf{0},\boldsymbol{a}_1,\mathbf{0}_{n_2+2},\boldsymbol{a}_3,\mathbf{0}_{n_4+2},\boldsymbol{a}_5,\mathbf{0}_{n_6+2},\cdots),$$
$$(\boldsymbol{a}_L,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\mathbf{0}_{n_3+2},\boldsymbol{a}_4,\mathbf{0}_{n_5+2},\boldsymbol{a}_7,\cdots).$$

(4) $(\cdots, \mathbf{0}_{n_{-l}}, 1, \mathbf{0}_{n_{-(l-1)}}, 1, \cdots, 1, \mathbf{0}_{n_{l-1}}, 1, \mathbf{0}_{n_l}, \cdots)$ の predecessor は，次の二つのいずれかである；

$$(\cdots, \boldsymbol{a}_{-3}, \mathbf{0}_{n_{-2}+2}, \boldsymbol{a}_{-1}, \mathbf{0}_{n_0+2}, \boldsymbol{a}_1, \mathbf{0}_{n_2+2}, \boldsymbol{a}_3, \cdots),$$
$$(\cdots, \mathbf{0}_{n_{-3}+2}, \boldsymbol{a}_{-2}, \mathbf{0}_{n_{-1}+2}, \boldsymbol{a}_0, \mathbf{0}_{n_1+2}, \boldsymbol{a}_2, \mathbf{0}_{n_3+2}, \cdots).$$

Proposition 3.5 より，$\mathcal{W}$ の要素の 1-step predecessor の型が定められたことになる．

また $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}$ の configuration について Proposition 3.5 を利用して次の Proposition 3.6 が得られる．

Proposition 3.6 (1) $(\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_l}, 1, \mathbf{0})$ が 0-finite な predecessor を持つためには，l が奇数であることが必要十分である．

(2) (1) から $(\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_l}, 1, \mathbf{0}) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$，$l$：偶，に対して

$$\boldsymbol{h}_L(\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_l}, 1, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_k}, 1, \mathbf{0}) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$$

とした時，k は奇数である．つまり左端の 1 と右端の 1 との間の 0 のブロックの個数は奇数個である．形式的には次の通りである．

$$\boldsymbol{h}_L((\mathcal{W} \cap \mathcal{F})_{evenblock}) = (\mathcal{W} \cap \mathcal{F})_{oddblock},$$
$$(\mathcal{W} \cap \mathcal{F})_{evenblock} = \{\ (\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_l}, 1, \mathbf{0}) \mid l : \text{even}\ , n_i : \text{odd}\ (1 \le i \le l)\ \},$$
$$(\mathcal{W} \cap \mathcal{F})_{oddblock} = \{\ (\mathbf{0}, 1, \mathbf{0}_{n_1}, 1, \mathbf{0}_{n_2}, \cdots, \mathbf{0}_{n_l}, 1, \mathbf{0}) \mid l : \text{odd}\ , n_i : \text{odd}\ (1 \le i \le l)\ \}.$$

3-2 2-step predecessor 2-step predecessor の型を定めるために，まず $\boldsymbol{a}_i$ の 1-step predecessor を探し出す必要がある．そこで $\boldsymbol{a}_i$ の構成から，まず $(0,1,0,1,0,\cdots,0,1,0,1,0)$ と $(0,1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1,0)$ の二つの strings の 1-step predecessor の型を調べておけば，その後にこれらを combine することで目的とする predecessor が得られることになる．

I $(0,\underbrace{1,0,1,0,\cdots,0,1,0,1}_{n \text{ 個の } 1},0)$ の predecessor で $\mathbf{1}_m$，$m \ge 3$ を含まないものは：

(i) $n = 2m$，$m \ge 1$ の時，a および b をそれぞれ 0 又は 1 として

$$(0,0,0,\overbrace{1,0,0,0,1,0,0,0,\cdots,0,0,0,1,0,0,0,1}^{m \text{ 個の } 1},0,0,0)$$
$$(0,\underbrace{1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots,1,0,1,0,1,0,1,0,1}_{2m \text{ 個の } 1},0)$$

又は

$$(a,\overbrace{1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,\cdots,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1}^{m+1 \text{ 個の } 1},b)$$
$$(0,\underbrace{1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots,1,0,1,0,1,0,1,0,1}_{2m \text{ 個の } 1},0)$$

(ii) $n = 2m+1$，$m \ge 0$ の時，a および b をそれぞれ 0 又は 1 として

$$(0,0,0,\overbrace{1,0,0,0,1,0,0,0,\cdots,0,0,0,1,0,0,0,1}^{m+1 \text{ 個の } 1},b)$$
$$(0,\underbrace{1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots,1,0,1,0,1,0,1}_{2m+1 \text{ 個の } 1},0)$$

又は

$$(a,\overbrace{1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,\cdots,0,1,0,0,0,1}^{m+1 \text{ 個の } 1},0,0,0)$$
$$(0,\underbrace{1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots,1,0,1,0,1,0,1}_{2m+1 \text{ 個の } 1},0)$$

Proof : $g(0,0,1)=g(1,0,0)=g(1,1,1)=1$ であり，他の (a,b,c) に対しては，$g(a,b,c)=0$ であることに注意すればよい． □

II (1) $(0,\underbrace{1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0)$ の predecessor は，a および b をそれぞれ 0 又は 1 として

$$\begin{array}{c}(a,\overbrace{1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1}^{n+1\text{ 個の }1},b)\\(0,\underbrace{1,1,0,1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0)\end{array}$$

Proof : predecessor を $(y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,\cdots)$ と置く．$(y_1,y_2,y_3)=(0,0,1)$ とすると $g(y_2,y_3,y_4)=0$ が y_4 の値に関わらず成立する．一方，$g(y_2,y_3,y_4)=1$ でなければならず，之は矛盾である．故に $(y_1,y_2,y_3)=(1,0,0)$ である．$\mathbf{1}_n$ $(n\geq 3)$ を含まない predecessor を探していることと $g(0,0,1)=g(1,0,0)=1$ であることに注意すれば，predecessor の型が主張の通り求まる． □

(2) $(0,\underbrace{1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0,0,0,\cdots)$ の predecessor は，a を 0 又は 1 として

$$\begin{array}{c}(a,1,0,0,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,0,0,\overbrace{1,\cdots}^{\boldsymbol{a}_R})\\(0,\underbrace{1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0,0,0,\cdots)\end{array}$$

(3) $(\cdots,0,0,0,\underbrace{1,1,0,1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0)$ の predecessor は，b を 0 又は 1 として

$$\begin{array}{c}(\overbrace{\cdots,1}^{\boldsymbol{a}_L},0,0,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,0,0,1,b)\\(\cdots,0,0,0,\underbrace{1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},0)\end{array}$$

(4) (2) と (3) から次のことが判る：

(4)-(i) $(0,1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,\mathbf{0})$ の predecessor は右側無限であり，$(\mathbf{0},1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1,0)$ の predecessor は左側無限である．よって 0-finite ではない．

(4)-(ii) $(\mathbf{0},\underbrace{1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},\mathbf{0})$ の predecessor は

$$\begin{array}{c}(\overbrace{\cdots,1}^{\boldsymbol{a}_L},0,0,\overbrace{1,0,0,1,0,0,1,\cdots,1,0,0,1,0,0,1}^{n-1\text{ 個の }1},0,0,\overbrace{1,\cdots}^{\boldsymbol{a}_R})\\(\mathbf{0},\underbrace{1,1,0,1,1,0,1,1,0,\cdots,0,1,1,0,1,1,0,1,1}_{n\text{ 組の }11},\mathbf{0})\end{array}$$

III (1) $(1,1,\mathbf{0}_{n_0},1,\mathbf{0}_{n_1},1,\cdots,1,\mathbf{0}_{n_{k-1}},1,\mathbf{0}_{n_k},1,1)$ の predecessor で $\mathbf{1}_m$, $(m\geq 3)$ を含まないものは；

(1)-(i) $k=2m+1$ の時は存在せず，

(1)-(ii) $k=2m$ の時，その型は次の通りである．

$$(1,0,0,\boldsymbol{a}_0,\mathbf{0}_{n_1+2},\boldsymbol{a}_2,\mathbf{0}_{n_3+2},\cdots,\mathbf{0}_{n_{2m-3}+2},\boldsymbol{a}_{2m-2},\mathbf{0}_{n_{2m-1}+2},\boldsymbol{a}_{2m},0,0,1)$$

Proof : Proposition 3.4(2) から $(1,1)$ の predecessor は $(1,0,0,1)$ のみである．従って，

$$(1,\mathbf{0}_{n_0},1,\mathbf{0}_{n_1},1,\cdots,1,\mathbf{0}_{n_{k-1}},1,\mathbf{0}_{n_k},1)$$

の predecessor で許されるものは，Proposition 3.4(1-ii) の前半のもののみである．　□

この命題 (1) より次の (2) は容易である．

(2) $(0,\underbrace{1,1,0,\cdots,0,1,1}_{k\text{ 組の }11},0,\underbrace{1,0,1,0,\cdots,0,1,0,1}_{n\text{ 個の }1},0,\underbrace{1,1,0,\cdots,0,1,1}_{l\text{ 組の }11},0)$ の predecessor は：

(2)-(i) $n=2m,\ m\geq 1$ の時

$$(a,\overbrace{1,0,0,1,\cdots,1}^{k\text{ 個の }1},0,0,\overbrace{1,0,0,0,1,\cdots,1,0,0,0,1}^{m+1\text{ 個の }1},0,0,\overbrace{1,\cdots,1,0,0,1}^{l\text{ 個の }1},b)$$

$$(0,\underbrace{1,1,0,\cdots,0,1,1}_{k\text{ 組の }11},0,\underbrace{1,0,1,0,\cdots,0,1,0,1}_{2m\text{ 個の }1},0,\underbrace{1,1,0,\cdots,0,1,1}_{l\text{ 組の }11},0)$$

(2)-(ii) $n=2m+1,\ m\geq 0$ の時，$\mathbf{1}_k,\ k\geq 3$ を含まない predecessor は存在しない．

以上の I，II の predecessor を組み合わせることによって，2-step predecessor が得られる．

References

[1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, Theoretical Computer Science, **145**(1995), 1-26.

[2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, Theoretical Computer Science, **201**(1998), 171-187.

[3] M.Gardner, Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", Scietific American, **223**(1970), 120-123.

[4] A. Ilachinski, Cellular Automata - A Discrete Universe, World Scientific, (2001).

[5] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, Physica **22D**(1986), 120-149.

[6] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.

[7] J. von Neumann, Theory of Self - Reproducing Automata, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).

[8] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **18**(2001), 59-73.

[9] 大鑄　史男, 基本セルオートマトンが生成する時空間パターン - Sierpinski Gasket -, 京都大学数理解析研究所講究録 1306「不確実性の下での意志決定の数理」2003.2, 142-151

[10] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,**21**(2004).

[11] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, **55**(1983), 601-644.

[12] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, Physica **10D**(1984),1-35.

[13] S. Wolfram, A NEW KINDS OF SCIENCE, Wolfram Media, Inc., (2002).